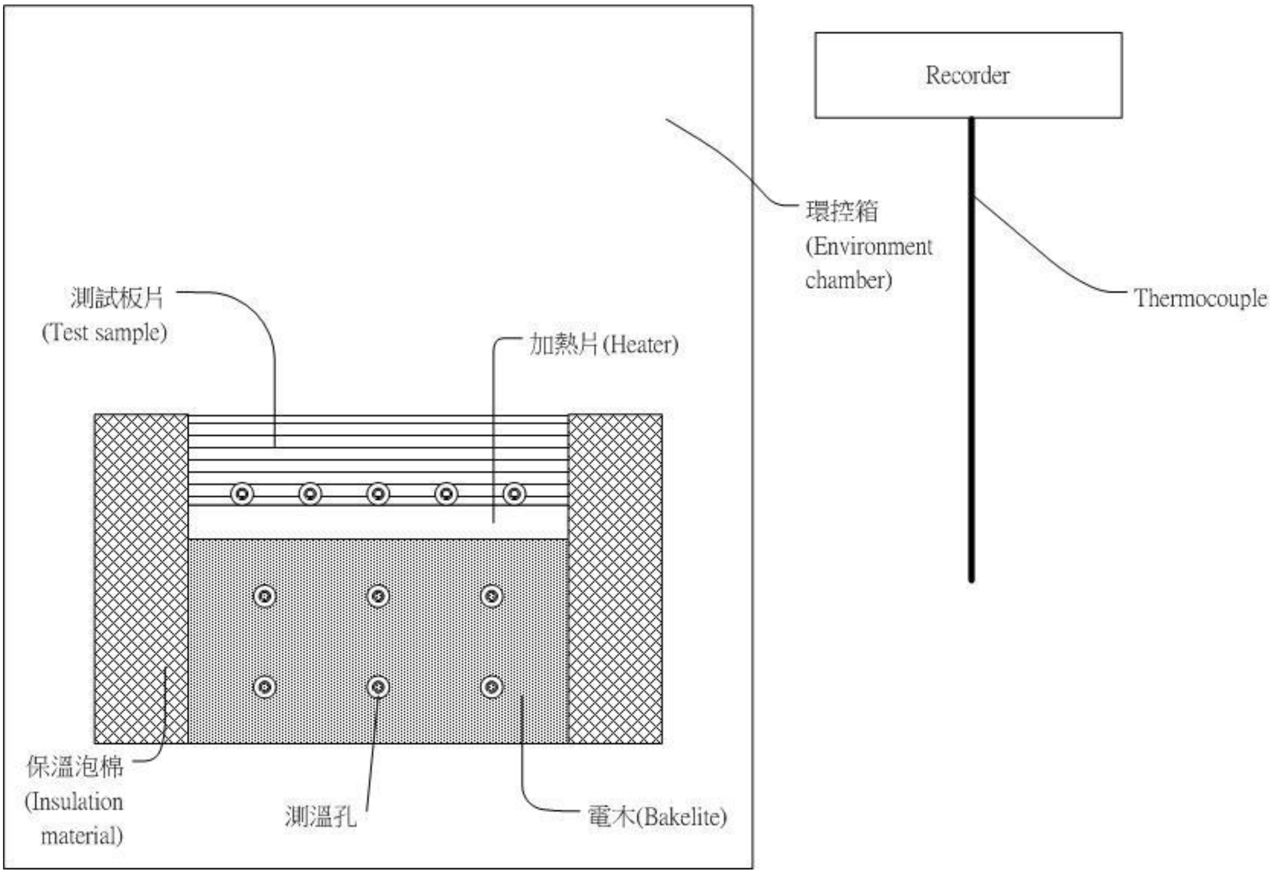
基礎測量與誤差傳遞分析

王翔生(長庚大學醫學系)
王啟川(國立交通大學機械工程系教授)

一、實驗目的

利用簡易的熱傳實驗及基礎測量校正，來學習實驗數據的物理量經計算之後的誤差傳遞。

二、實驗設備



(一)自然對流熱傳係數前置設備(Test facility for natural convection)

(二)熱電偶(Thermocouple)

(三)記錄器(Recorder)

(四)電源供應器(Power supply)

(五)標準溫度計(Standard thermometer)

(六)三用電表(multimeter)

三、實驗原理

(一)熱電偶校正

因為記錄器上熱電偶所得到溫度的讀值和真實溫度略有差異，所以在做精密的測量之前必須要做校正，由於在定壓下許多純物質相(phase)的改變都在定溫下進行，例如水在 760 mm-Hg 下的沸點是 100℃(373.15

K)，凝固點是 0℃(273.15 K)，故可利用這種定溫的特性校正。然本次實驗所採用的方式是用標準溫度計對其他溫度在 5 種溫度的恆溫槽中予以校正。利用標準溫度計和熱電偶在記錄器上的讀值所對應的 5 個點，作圖算回歸線，之後只需將記錄器上的溫度帶入便可得到真實溫度。

(二)誤差的種類

凡測量，必有誤差，一般而言，誤差可以分為系統誤差(systematic error)與隨機誤差(random error)。

1. 系統誤差(systematic error)

測量是指大家先共訂出一個測量單位(例如：溫度)，然後依據含有刻度的測量工具(例如：溫度計)，將測量工具和待測物互相比較，而判得測量值。

然而，如果測量工具本身，因為校正時的疏失、或因為環境的因素(例如溫度或濕度)改變、即因為人為不正確的操作或觀察方式等等因素，都有可能形成系統誤差的來源；至於某些非直接測量的物理量，也可能因為實驗時無法充分滿足原理所假設的狀況，或根本設計原理就有所失誤，而造成系統誤差。

通常「系統誤差」會使得所有測量值都過高或過低的偏差，偏差量大致相同，不含機率分佈的因素。

2. 隨機誤差(random error)

實驗的基本方法，總會希望能找出控制變因，以找出物理量受個別變因的影響。因此，在實驗時會控制所有影響的變因，一次只讓一種變因變化。但是，在實際操作時並不能盡如人意，這些不易控制(或根本無法控制)的小變因，就會產生如隨機分布的誤差。

通常「隨機誤差」會有如常態分佈般，有時測量值會過高，有時則會稍低。

因為系統誤差的成因並非不可控制的，所以要降低的方法，就要從正確的誤差來源下手：

儀器造成的 → 設法改良儀器。
環境造成的 → 設法控制實驗環境。
操作不良的 → 加強訓練自己！

而改善隨機誤差的方法，可以藉由統計的方法，增加測量次數來有效降低。

(三)準確度與精密度

1. 精密度(precision)

精密度則是指實驗結果可重複的程度。在相同條件下重複做多次測量，實驗數據是不可能完全重複的，因此，精密度也可以說是：重複多次測量，各個結果的差異程度，差異越小，精密度越高。

2. 準確度(accuracy)

準確度的定義是「測量值與真值（或公認值）的偏差程度。」換句話說，準確度是指實驗值與待測物理量的真正值之差。

(四)有效位數的捨入與四則運算

在紀錄實驗數據和實驗結果時，要使用適當位數的有效數字，以正確表達實驗的準確度。例如，測量(溫度)，直接從儀器(溫度計)刻度上讀出來的數量必定在某一位數中止。在記錄數據時，除了從儀器上直接讀到的精確數字(如 42.1℃)外，通常會再加上一位估計數字(如 7)，最後的這一位估計數字並不是準確的，這個包含估計數字的數據(42.17℃)，就稱作「有效數字」。

當數據經過運算過後，需要將運算的結果捨或入時，可以按照「4 捨 6 入」原則，即：

1. 要捨入部分的第一位是 6 或大於 6 的數，則捨去後將前面一位數加 1
   例如：1.478 經捨入得 1.48。
2. 要捨入部分的第一位是 4 或小於 4 的數，則捨去後前面一位數不變
   例如；1.472 經捨入得 1.47。
3. 如果捨去部分只有一位，其值為 5，則視前面一位的奇偶決定，「遇雙變捨，逢單則入」如此一來在運算過程中會比較好處理。
   例如：1.475 經捨入得 1.48
   例如：1.465 經捨入得 1.46
4. 若捨去部分不只一位數且其第一位數為 5，則捨去後前面一位數加 1 (即 4 捨 5 入)
   例如：1.4652 經捨入得 1.47

(五)有效數字的運算法則

1. 加減法的有效位數運算
   看加減法中的估計值的位置,答案取捨到加減法中估計位數最前面的一位
   例如：124-2.75-113.2+4253.2=4261.25
   124→估計值是 4(估計位數最前面)
   2.75→估計值是 0.05
   113.2→估計值是 0.2
   4261.25→估計值是 0.05
   因此答案的估計位數到個位，亦即 4261
2. 乘除法的有效位數運算
   在乘除法中，答案須配合有效位數最少的數值
   例如：$2.\underline{1} \times 1.27\underline{5} \div 0.032\underline{5} \times 0.7231\underline{7} = 5\underline{9.5780823........}$
   2.1→有效位數兩位(最少)
   1.275→有效位數四位
   0.0325→有效位數三位

0.7231<u>7</u>→有效位數五位

因此最後答案取到有效位數兩位，亦即 6<u>0</u>

(六)統計分析

統計分析理論一直被廣泛運用在處理實驗數據，藉著這種分析，可以了解實驗的結果到底有何種程度的不確定性。這裡先介紹統計分析中常用到的幾個術語和他們的計算法，在簡要介紹誤差在加、減、乘、除運算中的傳遞。

1. 算術平均數(mean)或簡稱平均值

對同一個物理量做 n 次測量，所得到的數據為x_1、x_2、$x_3 \ldots$、x_n，則實驗結果的算術平均值可表示為：

$$\bar{x} \equiv \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

理論上，無限多的數據會有較好的平均值，但是實際上，在許多實驗中有限個數據已可以得到很好的結果。

2. 偏差(deviation)

指某組數據與整組數據的算術平均數的差。偏差有正和負，整組數據偏差總和為零。令符號 *d* 代表偏差，則：

$d_1 = x_1 - \bar{x}$，$d_2 = x_2 - \bar{x}$，$d_3 = x_3 - \bar{x}$， … ，$d_n = x_n - \bar{x}$

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = \sum_{i}^{n} d_i = 0$$

3. 平均偏差(deviation)

平均偏差 *D* 定義為：

$$D \equiv \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + \cdots + |d_n|}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}|d_i|$$

平均偏差的大小可以顯示實驗所用儀器的精密程度，但一般實驗結果的不準度很少只以平均偏差來表示。

4. 標準偏差(standard deviation)或稱標準差

標準差的定義為：

$$S \equiv \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \cdots + d_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i^2}$$

上式的標準差是母群體標準差，指所有可能數據所做出來的標準差，例如探討本班 50 人的身高平均，我們就取到 50 個數據，把母體的所有值都取出來運算，但是，在許多時候，我們無法得知整個母

體的所有數值，例如我們要做台灣所有人的身高平均，我們無法得知所有台灣人的身高，所以這時，往往會採用抽樣調查來決定，此時抽樣出來的數值，來自於母體，稱為子群體。

在統計裡，我們希望用子群體的數值，來估計出母群體的數值。

以平均值來說

$$\mathrm{E}(x_i) = \mu\left(\text{母群體平均}\right) = \bar{X}(\text{子群體平均})$$

$$\text{因為 } \mathrm{E}(\bar{X}) = \mu$$

同樣的，我們也會希望子群體的標準差σ有辦法估計出母群體的標準差S也就是

$$\mathrm{E}(S) = \sigma$$

經過計算，得出

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} d_i^2}$$

5. 簡單的統計原理

機率論的觀念對於做實驗的人非常重要，一般來說，最具代表性的機率分佈有三種：二項式分佈(binomial distribution)、卜瓦松分佈(Poisson's distribution)以及常態分佈(normal distribution)。

(1) 二項式分佈：

假設一事件發生的形式只有 X 與 Y 兩種，而發生 X 的機率為 *p*，發生 Y 的機率為 *q*(*q*=1-*p*)，在 *N* 次實驗中，X 發生 *n* 次的機率為：

$$P_B(n) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}p^n q^{N-n}$$

(2) 卜瓦松分佈：

如果在二項是分布中，X 形式發生的機率趨近於零(*p*→0)，且實驗次數極大(*N*→∞)，則 X 發生 *n* 次的機率就是卜瓦松分佈。例如某一放射性原子，每秒衰變的機率為 *p*(假設為10^{-10})，而所有樣品數$N = 10^{15}$，因此每秒鐘約有10^5個衰變量，此時，可以定義期望值(expectation value)或平均值：

$$m = Np$$

但是，實際的測量不一定剛好得到 *m* 個原子的衰變，就如同丟 10 個硬幣不會每次都是 5 個正面 5 個反面，所以，經過數學推導，在$N \to \infty$時，可以得到卜瓦松分佈：

$$P_P(n) = \frac{m^n e^{-m}}{n!}$$

式中 *m* 為 *n* 的平均值(雖然每次實驗每秒的衰變量都不會剛

好是10^5，但是實驗了許多次後平均每秒衰變量為10^5)，即$m=\bar{n}$。這種情況下，標準差為：

$$\sigma=\sqrt{m}$$

當 *m* 值越大，其分佈圖會較對稱。

(3) 常態分佈：

又稱高斯分佈(Gaussian distribution)。當對自然界中許多事物的某一物理量經過重複多次測量時，所得的數據會成一鐘形分佈，此種情況，相當於卜瓦松分佈中 *m* 非常大的情況。而測量的次數越多，這個分佈曲線也會越平滑、越明顯，此種常態分佈曲線，可以用以下函數式表示：

$$P_G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

式中，x_0為鐘形分佈頂點位置的 *x* 做標值(期望值)，σ為標準差，σ與 *x* 的單位相同。

6. 平均標準差(standard deviation of the mean)

由一組 *n* 個量度而得的數據，期平均值的準確度要比單一量度的值好。若記錄第二組 *n* 個量度的數據，一般而言，第二組的平均值與第一組的平均值不會相等，但可以預期其差值必小於任意組的標準差。理論上可以做 *N* 組 *n* 個量度，畫出 *N* 個平均值分佈圖，並計算者些平均值之標準差，稱為平均標準差(σ_x)。這個平均標準差一定比由單一組得到的標準差小。這種工作冗繁無比，利用統計理論，可以從一組 *n* 個量度的標準差σ算出σ_x，其計算式為：

$$\sigma_x=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i}^{n}d_i^2}$$

可將此σ_x值視為測得的平均值之精密度(或誤差)最佳估計。通常會以$\bar{x}\pm\sigma_x$表示某一物理量 *x* 的測量值。

7. 誤差傳遞

物理量分為基本量和導出量，導出量是由幾個基本量運算而得的，例如：電功率等於電流乘上電壓。一個實驗結果往往由幾個直接測得的量運算而得，因此結果的平均標準差就必須由直接測量知各量的$\sigma_{\bar{x}}$計算而得。

在此令導出量為 *X*，而直接測到的量為 *u*、*v*，則可以寫成函數式：

$$X=f(u,v)$$

所以$\bar{u},\bar{v}$分別代表 *u*,*v* 的平均值。

而$\bar{X}=f(\bar{u},\bar{v})$，對於某一組測量樣本數據，可以表示為：

$$X_i=f(u_i,v_i)$$

所以可以導出：

$$X_i - \bar{X} = f(u_i, v_i) - f(\bar{u}, \bar{v})$$

$$= \left[f(\bar{u}, \bar{v}) + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\bar{u}} (u_i - \bar{u}) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{\bar{v}} (v_i - \bar{v})\right] - f(\bar{u}, \bar{v})$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{\bar{u}} (u_i - \bar{u}) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{\bar{v}} (v_i - \bar{v})$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}} (u_i - \bar{u}) + \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}} (v_i - \bar{v})$$

所以方差σ_X^2可以由此導出：

$$\sigma_X^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}} (u_i - \bar{u}) + \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}} (v_i - \bar{v})\right]^2$$

$$= \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 (u_i - \bar{u})^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 (v_i - \bar{v})^2 + 2(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}} \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}\right]$$

$$= \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 + 2\sigma_{uv}^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}} \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}$$

其中

$$\sigma_u^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})^2 \,, \sigma_v^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (v_i - \bar{v})^2$$

$$\sigma_{uv}^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (u_i - \bar{u})\,(v_i - \bar{v})$$

σ_{uv}^2稱為協方差(covariance)，如果 *u* 和 *v*(測量物理量)彼此不相關，則協方差為零。於是方程式可化簡為：

$$\sigma_X^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2$$

以下提供幾種運算的誤差傳遞式

(1) 加減法

$$X = u \pm v$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{u\pm v}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2$$

$$= \sigma_u^2 + \sigma_v^2$$

(2) 乘法

$$X = uv$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{uv}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 = \sigma_u^2 \bar{v}^2 + \sigma_v^2 \bar{u}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_X}{\overline{uv}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{uv}}{\overline{uv}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_u}{\bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2$$

(3) 除法

$$X = \frac{u}{v}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{\frac{u}{v}}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\bar{v}^2} + \frac{\sigma_v^2 \bar{u}^2}{\bar{v}^4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_X}{\frac{\bar{u}}{\bar{v}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\frac{u}{v}}}{\frac{\bar{u}}{\bar{v}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_u}{\bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2$$

(4) 有冪次的乘除法

$$X = u^l v^m$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{u^l v^m}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 = l^2 \bar{u}^{2l-2} \bar{v}^{2m} \sigma_u^2 + m^2 \bar{u}^{2l} \bar{v}^{2m-2} \sigma_v^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_X}{\bar{u}^l \bar{v}^m}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{u^l v^m}}{\bar{u}^l \bar{v}^m}\right)^2 = l^2 \left(\frac{\sigma_u}{\bar{u}}\right)^2 + m^2 \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2$$

(5) 例子

某一六面體，三邊邊長分別為 a(12.$\underline{8}$cm±0.4cm), b(7.$\underline{2}$cm±0.2cm), c(4.$\underline{7}$cm±0.3cm)，試計算其表面積及誤差。

表面積 $\bar{A} = 2\bar{a}\bar{b} + 2\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{c}$

$$= 2 \times 12.\underline{8} \times 7.\underline{2} + 2 \times 7.\underline{2} \times 4.\underline{7} + 2 \times 4.\underline{7} \times 12.\underline{8}$$

$$= 1\underline{8}4.32 + 6\underline{7}.68 + 1\underline{2}0.32$$

$$= 3\underline{72.32} = 370$$

因為在 abc 相乘的過程中，有效位數要取最小的，所以有效位數只有兩位，然後在接下來的相加過程中，有效位數要取到最前面的，也就是取到十位數，所以最後 $\bar{A} = 370\text{cm}^2$。

然後是計算誤差傳遞：

$$\left(\frac{\sigma_{2ab}}{2\overline{ab}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_b}{\bar{b}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{2ab}}{184.32}\right)^2 = \left(\frac{0.4}{12.8}\right)^2 + \left(\frac{0.2}{7.2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{2ab} \approx 7.70662$$

$$\left(\frac{\sigma_{2bc}}{2\overline{bc}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_b}{\bar{b}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\bar{c}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{2bc}}{67.68}\right)^2 = \left(\frac{0.2}{7.2}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{4.7}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{2bc} \approx 4.71135$$

$$\left(\frac{\sigma_{2ac}}{2\overline{ac}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_a}{\bar{a}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_c}{\bar{c}}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{ac}}{120.32}\right)^2 = \left(\frac{0.4}{12.8}\right)^2 + \left(\frac{0.3}{4.7}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{2ac} \approx 8.55102$$

$$\sigma_{\bar{A}}^2 = \sigma_{2ab}^2 + \sigma_{2bc}^2 + \sigma_{2ac}^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{A}}^2 = 7.70662^2 + 4.71135^2 + 8.55102^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\bar{A}} \approx 12.4381$$

因為$\bar{A}$取有效位數到十位數，所以$\sigma_{\bar{V}}$最後也是要取到十位數，所以最終答案為：

$$\overline{A} = 370\text{cm}^2 \pm 10\text{cm}^2$$

四、實驗計算

(一)熱電偶(thermocouple)校正

作$T_S - T_C$圖，以回歸線求換算式校正

(二)加熱片功率計算

$$P = IV$$

P：電功率、I：電流、V：電壓

(三)電木傳導熱量計算

$$Q_B = -k_B A_B \frac{\Delta T_B}{\Delta x_B}$$

Q_B：電木中的熱流率、k_B：電木的熱傳導係數、A_B：電木的表面積、ΔT_B：電木上下測溫孔的溫差、Δx_B：電木上下測溫孔的距離

(四)測試板片表面溫度計算

因為總功率為 P，經由電木傳導出去的能量的熱流率是Q_B，又因為周圍有保溫泡棉絕熱，因此假設剩下的能量$(P - Q_B)$都是經由測試板片流出，所以，測試板片的熱流率$Q_T = P - Q_B$，所以可以寫出：

$$P - Q_B = Q_T = -k_T A_T \frac{\Delta T_T}{\Delta x_T} = -k_T A_T \frac{T_O - T_I}{\Delta x_T}$$

k_T：測試板片的熱傳導係數、A_T：測試板片的表面積、ΔT_T：測試板片的表面和測溫孔的溫差、Δx_T：測試板片的厚度、T_O：測試板片的表面溫度、T_I：測試板片的測溫孔溫度

所以可以寫出：

$$T_O = T_I - \frac{(P - Q_B)\Delta x_T}{k_T A_T}$$

(五)自然對流熱傳係數計算

在達到平衡的時候，測試板片的熱流率會等於因為自然對流所散失的熱流率，所以可以列出：

$$Q_T = -hA_T(T_\infty - T_O)$$

h：局部對流係數、T_∞：環控箱內溫度

所以經過整理：

$$h = -\frac{Q_T}{A_T(T_\infty - T_O)} = -\frac{P - Q_B}{A_T\left(T_\infty - (T_I - \frac{(P - Q_B)\Delta x_T}{k_T A_T})\right)}$$

五、實驗步驟

(一)熱電偶(thermocouple)校正

1. 放置一標準溫度計於恆溫槽內，調整恆溫槽溫度至 30℃
2. 連接熱電偶至 recorder 上
3. 將要熱電偶置入恆溫槽內的銅塊凹陷處
4. 待標準溫度計的溫度(T_S)及熱電偶的溫度(T_C)都不再變化後，紀錄T_S和T_C。
5. 改變恆溫槽溫度至 45℃、60℃、70℃及 80℃，重複步驟 2.~3.
6. 以T_S對T_C作圖，計算回歸線，可得$T_S = aT_C + b$

(二)加熱片功率計算

1. 連接電源供應器和電熱板
2. 取三用電表分別測量電流(*I*)和電壓(*V*)並記錄誤差範圍
3. 計算功率 *P* 及誤差傳遞
   注意：功率 *P* 不要超過 20 瓦特，以免儀器損毀
4. 等待 20 分鐘，讓儀器達到平衡狀態

(三)電木傳導熱量計算

1. 達到平衡之後，將熱電偶分別插入上排的 3 個測溫孔，記錄其溫度
2. 重複步驟 1.，將 6 個數據取平均值及計算標準差
3. 將熱電偶分別插入下排的 3 個測溫孔，記錄其溫度
4. 重複步驟 3.，將 6 個數據取平均值及計算標準差
5. 以直尺分別量測上排和下排測溫孔的距離
6. 重複步驟 5.，將 6 個數據取平均值及計算標準差
7. 以直尺量測電木的長和寬各 6 次，個別取平均並計算標準差後，相乘算出電木的表面積A_B並計算誤差傳遞
8. 以現成提供的k_B，計算Q_B以及誤差傳遞

(四)測試板片表面溫度計算

1. 將熱電偶分別插入測試板片和加熱片交界處的 5 個測溫孔，記錄其溫度，並將 5 個數據計算平均值及標準差
2. 令測試板片的表面積跟電木表面積相同$A_T = A_B$
3. 以直尺量測測試板片的厚度 6 次，將 6 個數據取平均值及計算標準差
4. 以現成提供的k_T，根據實驗計算(四)中的公式計算T_O以及誤差傳遞

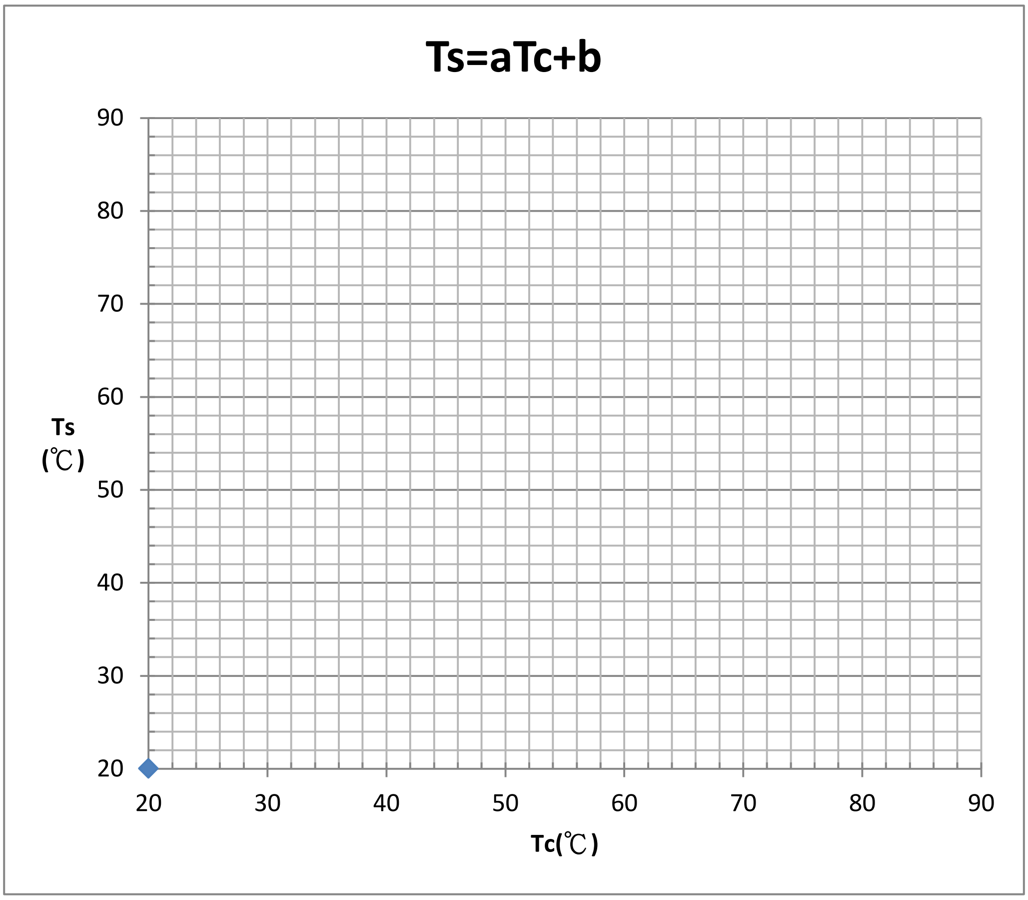
(五)自然對流熱傳係數計算

1. 在環控箱內以熱電偶測量 6 次溫度，計算T_∞的平均值及標準差
2. 根據實驗計算(五)中的公式計算 *h* 以及誤差傳遞
3. 改變功率，重複步驟(一)~(四)
4. 將 3 種功率的所得到的 *h* 和Q_T，做$h - Q_T$圖

六、實驗結果

(一)熱電偶校正

恆溫槽溫度	標準溫度計溫度(T_S)	熱電偶測得溫度(T_C)
30℃		
45℃		
60℃		
70℃		
80℃		



$$T_S = \_\_\_\_\_\_\_\_ T_C + \_\_\_\_\_\_\_\_$$

(二)加熱片功率計算(有三組功率)

	I(安培)	*V*(伏特)	*P*(瓦特)
第一次實驗	±	±	±
第二次實驗	±	±	±
第三次實驗	±	±	±

(三)電木傳導熱量計算(有三組)

	上下測溫孔之間距(cm)	電木長(cm)	電木寬(cm)
數據 1			
數據 2			
數據 3			
數據 4			
數據 5			
數據 6			
平均	±	±	±

$A_B =$ ____________ ± ____________

	第一次實驗		第二次實驗		第三次實驗	
	上孔(℃)	下孔(℃)	上孔(℃)	下孔(℃)	上孔(℃)	下孔(℃)
數據 1						
數據 2						
數據 3						
數據 4						
數據 5						
數據 6						
平均						
標準差						
k_B	________ ± ________					
Q_B	________ ± ________		________ ± ________		________ ± ________	

(四)測試板片表面溫度計算(有三組)

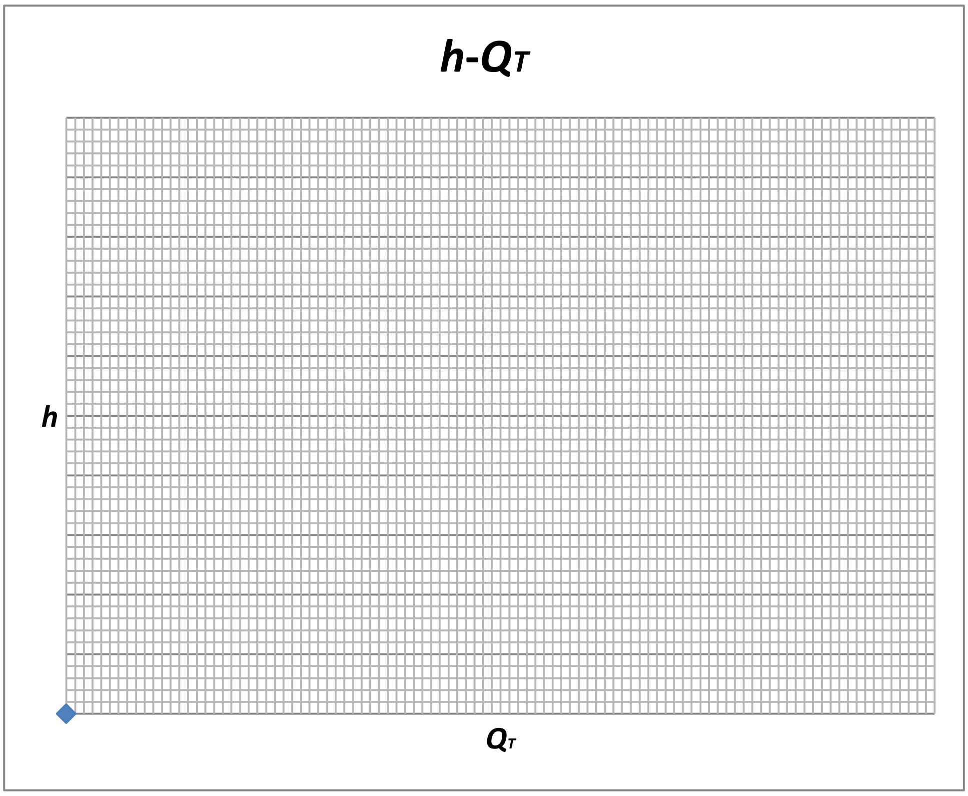
測試板片厚度(cm)					
數據 1		數據 3		數據 5	
數據 2		數據 4		數據 6	
平均	±				

	測試板片的測溫孔溫度(℃)		
	第一次實驗	第二次實驗	第三次實驗
數據 1			
數據 2			
數據 3			
數據 4			
數據 5			
平均			
$A_B = A_T$	______ ± ______		
Q_T	______ ± ______		
k_T	______ ± ______		
T_O	______ ± ______	______ ± ______	______ ± ______

(五)自然對流熱傳係數計算(有三組)

環控箱溫度T_∞(℃)					
數據 1		數據 3		數據 5	
數據 2		數據 4		數據 6	
平均	±				

	局部對流係數 *h*		
	第一次實驗	第二次實驗	第三次實驗
Q_T	________ ± ________	________ ± ________	________ ± ________
h	________ ± ________	________ ± ________	________ ± ________



七、問題與討論

1. 整個實驗中，為何沒有考慮到因為幅射而散失的熱量？
2. 在實驗中的標準差，是屬於隨機誤差還是系統誤差？
3. $h-Q_T$圖中要如何表示其標準差？

八、心得與建議

例題說明 (紅色為解答)

1. 下列數值的估計值位數都超過兩位，請將其取捨到最適當的範圍
   (1) $2.56\underline{823}$=$2.56\underline{8}$
   (2) $0.56\underline{983}$=$0.57\underline{0}$
   (3) $2.4\underline{85}$=$2.4\underline{8}$
   (4) $3.7\underline{75}$=$3.7\underline{8}$
   (5) $7.\underline{2565}$=$7.\underline{3}$
2. 下列運算請取到最適當的位數
   (1) $1.02\underline{1} + 2.6\underline{9}$ =$3.7\underline{1}$
   (2) $12.\underline{3} - 1.6\underline{3}$ =$10.\underline{7}$
   (3) $4.3\underline{4} \times 9.\underline{2}$ =$4\underline{0}$
   (4) $0.060\underline{2} \div 2.11\underline{3}$ =$0.028\underline{5}$
   (5) $\log(4218\underline{2})$=$4.6251\underline{2}$
   (6) $10^{2.38\underline{4}}$ =$24\underline{2}$
3. 嘗試推導除法誤差傳遞的公式

   方程式：$X = \frac{u}{v}$

   已知u的標準差為σ_u，v的標準差為σ_v，求X的標準差σ_X和σ_u、σ_v的關係式。

   提示：$\sigma_X^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2$

$$\sigma_X^2 = \sigma_{\frac{u}{v}}^2 = \sigma_u^2 \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)_{\bar{u}}^2 + \sigma_v^2 \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)_{\bar{v}}^2 = \frac{\sigma_u^2}{\bar{v}^2} + \frac{\sigma_v^2 \bar{u}^2}{\bar{v}^4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sigma_X}{\frac{\bar{u}}{\bar{v}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\frac{u}{v}}}{\frac{\bar{u}}{\bar{v}}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_u}{\bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2$$

4. 計算下列算式的結果(包含準確值、估計值、誤差)：
   提示：加減法的誤差傳遞公式：$\sigma_X^2 = \sigma_u^2 + \sigma_v^2 \;\; (X = u \pm v)$

   提示：乘法的誤差傳遞公式：$\left(\frac{\sigma_X}{\bar{X}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_u}{\bar{u}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{\bar{v}}\right)^2 \;\; (X = uv)$

   方程式：$Y = ab + cde$
   $a = 12.7\underline{1} \pm 0.72$
   $b = 94.62\underline{7} \pm 0.831$
   $c = 11.642\underline{4} \pm 0.1341$
   $d = 9.8232\underline{4} \pm 0.25173$
   $e = 13.666\underline{6} \pm 0.3674$
   $ab = 120\underline{3} \pm 69 \quad cde = 1563.0\underline{0} \pm 60.78$
   求$Y = 276\underline{6} \pm 92$